

Новые задачи по математике

Георгий Гуляев

17 мая 2026 г.

Математик без компьютера - астроном без телескопа

Здесь рассматриваются математические задачи, идея для условия или решения которых, была найдена мною при помощи программирования и исследования на компьютере.

Для некоторых из этих задач существует обычное математическое решение при помощи рассуждений и без использования компьютера, которое и содержится в первой части в разделе решений.

Другие приведены без решения. Они для любознательных читателей, которые не боятся использовать компьютер для решения задач по математике.

1. Задачи с решением

Задача 101. Последовательность состоит из натуральных чисел. Каждое следующее число последовательности получается из предыдущего при помощи операции сложения с реверсным, цифры которого записаны в обратном порядке. Доказать, что если первые три члена последовательности оказались простыми, например,

$$271, 443, 787, \dots,$$

то четвертое число всегда будет составным.

Задача 102. Квадрат со стороной $1 < n < 35$ (n - натуральное) разрезали на квадраты меньшего размера с натуральными сторонами. При этом, для некоторого натурального k оказалось k квадратов 1×1 , $k - 1$ квадратов 2×2 и так далее, 2 квадрата $(k - 1) \times (k - 1)$ и один квадрат $k \times k$. Найти n и построить разбиение большого квадрата на мелкие на чертеже.

Задача 103. Известно, что кубическое уравнение:

$$x^3 - 35x^2 + 68x = r,$$

где $r > 0$ - действительное число, имеет три вещественных положительных корня. Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, со сторонами равными корням данного уравнения.

Задача 104. Пусть p и q простые, $p > q$. Их полусумма $\frac{p+q}{2}$ и полуразность $\frac{p-q}{2}$ - натуральные и тоже простые. Доказать, что $p = 7, q = 3$.

Задача 105. Легко проверить, что $2^6 = 42^2 - 8^3$. То есть число 2^n при $n = 6$ удалось представить в виде разности квадрата и куба:

$$2^n = a^2 - b^3$$

двух натуральных чисел a и b . Найдите такие a и b для $n = 90$.

Задача 106. Разгадайте ребус:

$$AB^2 - BA^3 = 2^A$$

Здесь A и B - две разные цифры.

Задача 107. Число n делится на 5, но не делится на 3 и равно произведению трех разных простых чисел. Сумма всех делителей числа n оказалась больше $2n$. Найдите n .

Задача 108. Числа 521, 5021, 50021 - являются простыми, но число с тремя нулями $500021 = 17 \cdot 67 \cdot 439$ - составное.

Можно проверить, что число 50...021 будет также простым, если оно содержит 5, 8, 15, 20, 30, 31, 37 нулей в своей десятичной записи.

Докажите, что для любого натурального n число 50...021, содержащее $2025^n + 1$ нулей, - составное.

Решения

101. Простые числа оканчиваются на цифры: $[1, 3, 7, 9]$. В начале простого числа могут быть любые цифры, кроме 0.

Допустим, что первое число последовательности начинается на цифру a и оканчивается на цифру b , второе - начинается на цифру c и оканчивается на цифру d и третье - начинается на цифру e и оканчивается на цифру f .

Тогда $d = (a + b) \% 10$ (d - остаток от деления на 10 суммы $a + b$). Так как второе число простое, то первое должно начинаться на одну из цифр $[2, 4, 6, 8]$.

Рассматривая все 16 комбинаций, нетрудно доказать, что для первого простого числа всегда будет $a = 2, b = 1$, для второго $c = 4, d = 3$ и для третьего $e = [7, 8], f = 7$. Из этого следует, что четвертое число оканчивается на 4 или на 5, то есть составное.

Если $(a, b) = [(2, 3), (4, 1), (6, 9), (8, 7)]$, то $d = 5$ - второе число составное.

Если $(a, b) = [(2, 9), (4, 7), (8, 3)]$, то $c = 1$ и $d = 1$, то есть $f = 2$ - третье число составное.

Если $(a, b) = [(2, 7), (6, 3), (8, 1)]$, то $c = [1, 9], d = 9$ и $f = [0, 8]$ - третье число составное.

Если $(a, b) = [(4, 3), (6, 1)]$, то $c = [7, 8], d = 7$ и $f = [4, 5]$ - третье число составное.

Если $(a, b) = [(4, 9), (6, 7)]$, то $c = 1, d = 3$ и $f = 4$ - третье число составное.

Если $(a, b) = (8, 9)$, то $c = 1, d = 7$, и $f = 8$ - третье число составное.

Остается последний возможный случай: $(a, b) = (2, 1)$, тогда, $c = [3, 4], d = 3$. Если $(c, d) = (3, 3)$, то $f = 6$ - третье число составное.

Таким образом, для того чтобы все три начальные члены последовательности были простыми существует единственная возможность: $(a, b) = (2, 1), (c, d) = (4, 3)$, откуда следует $e = [7, 8], f = 7$ и четвертое число оканчивается на 4 или на 5, то есть всегда будет составным. Что и требовалось доказать.

Замечания к задаче 101.

Начальные последовательности с первыми тремя простыми членами:

271, 443, 787, 1574, ...
281, 463, 827, 1555, ...
21491, 40903, 71807, 142624, ...
21991, 41903, 72817, 144644, ...
22091, 41113, 72227, 144454, ...
22481, 40903, 71807, 142624, ...
23081, 41113, 72227, 144454, ...
23971, 41903, 72817, 144644, ...
24071, 41113, 72227, 144454, ...
25951, 41903, 72817, 144644, ...
26681, 45343, 79697, 159394, ...
26981, 45943, 80897, 160705, ...
27271, 44543, 79087, 157184, ...
27431, 40903, 71807, 142624, ...
27691, 47363, 83737, 157475, ...
27791, 47563, 84137, 157285, ...
28031, 41113, 72227, 144454, ...
28661, 45343, 79697, 159394, ...
28921, 41903, 72817, 144644, ...
28961, 45943, 80897, 160705, ...
29021, 41113, 72227, 144454, ...
29191, 48383, 86767, 163535, ...
29251, 44543, 79087, 157184, ...
29411, 40903, 71807, 142624, ...
29671, 47363, 83737, 157475, ...
2129891, 4119103, 7138217, 14266534, ...
2131991, 4123303, 7156517, 14313034, ...
2141791, 4113203, 7136317, 14272634, ...
2141891, 4123303, 7156517, 14313034, ...
2151791, 4123303, 7156517, 14313034, ...
2157091, 4064603, 7129207, 14158424, ...
2161591, 4113203, 7136317, 14272634, ...
...

В таких последовательностях, сколько бы мы их не продолжали, не

удается найти других простых чисел, кроме начальных трех. Поэтому сформулируем гипотезу: *в любой последовательности, получаемой при помощи операции сложения с реверсным не может быть более трех простых членов.*

102. Очевидно, сумма площадей всех квадратов разбиения для выбранного k должна быть равна n^2 :

$$S_k = k \cdot 1^2 + (k-1) \cdot 2^2 + (k-2) \cdot 3^2 + \dots + 2 \cdot (k-1)^2 + 1 \cdot k^2 = n^2$$

Будем последовательно вычислять S_k ($k = 2, 3, \dots$) пока $S_k < 35^2 = 1225$.

$$S_2 = 6, n = \sqrt{6}$$

$$S_3 = 20, n = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

$$S_4 = 50, n = \sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2}$$

$$S_5 = 105, n = \sqrt{105}$$

$$S_6 = 196, n = \sqrt{196} = 14$$

$$S_7 = 336, n = \sqrt{336} = 4 \cdot \sqrt{21}$$

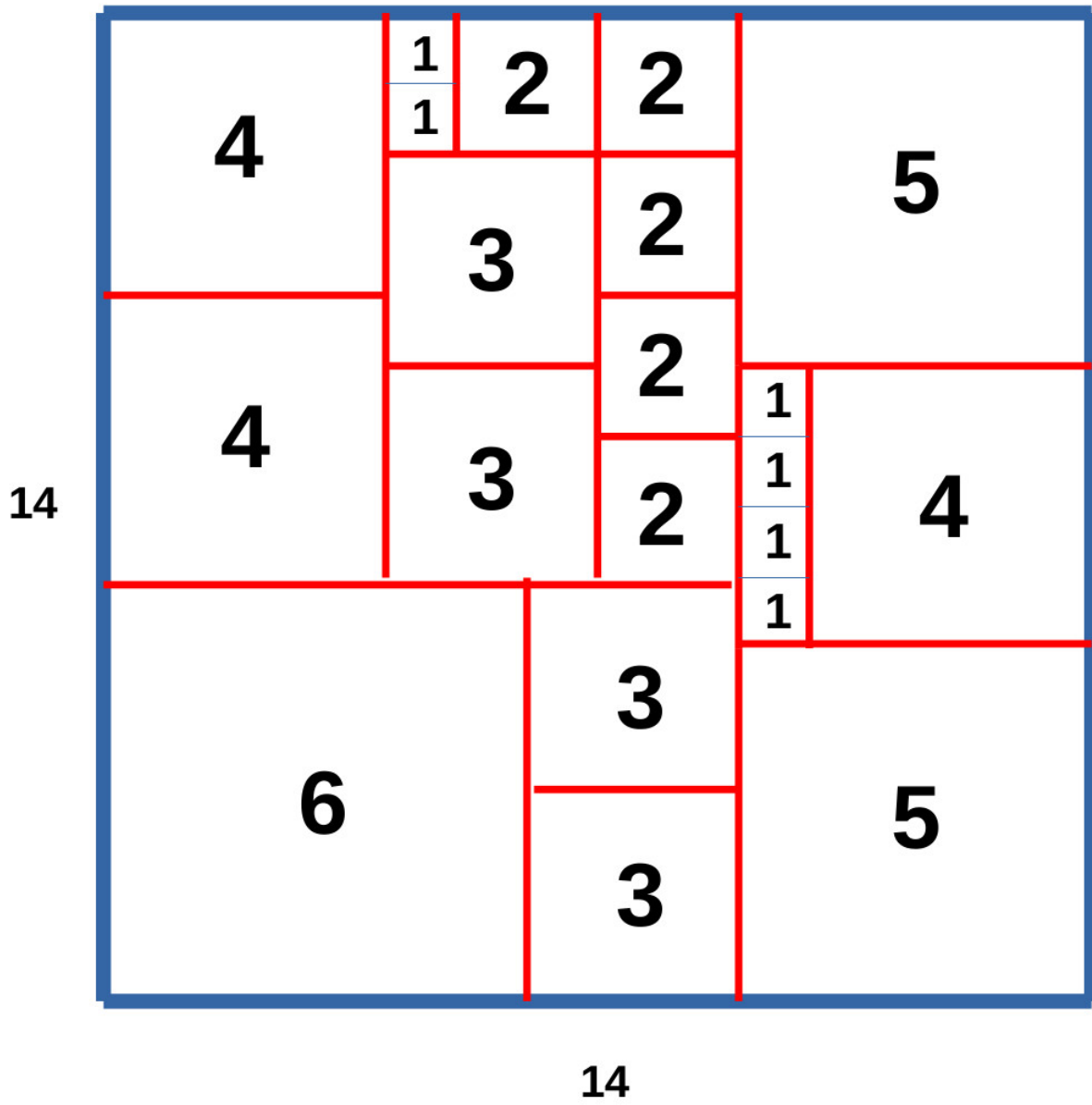
$$S_8 = 540, n = \sqrt{540} = 6 \cdot \sqrt{15}$$

$$S_9 = 825, n = \sqrt{825} = 5 \cdot \sqrt{33}$$

$$S_{10} = 1210, n = \sqrt{1210} = 11 \cdot \sqrt{10}$$

$$S_{11} = 1716, n = \sqrt{1716} = 2 \cdot \sqrt{429}$$

Таким образом, решение возможно только при $k = 6, n = 14$. Теперь осталось только его построить:



Замечания к задаче 102.

Сумма S_k является квадратом в следующих случаях (k, n) :

(k, n)

(1, 1)
(6, 14)
(25, 195)
(96, 2716)
(361, 37829)
(1350, 526890)
(5041, 7338631)
(18816, 102213944)
(70225, 1423656585)
...

Последовательность $a_n = \{1, 6, 25, 96, 361, 1350, 5041, 18816, 70225, \dots\}$ оказалась известной [1]. В частности, там приводится формула:

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 2}{2}, n = 1, 2, \dots$$

Вторая последовательность $b_n = \{1, 14, 195, 2716, 37829, \dots\}$ также встречается в энциклопедии целых последовательностей [2]. Она может быть задана рекуррентной формулой:

$$b_n = 14 \cdot b_{n-1} - b_{n-2}, b_0 = 0, b_1 = 1, n = 2, 3, 4, \dots$$

103. Пусть $a > 0, b > 0, c > 0$ - корни кубического уравнения $x^3 - 35x^2 + 68x = r, d$ величина диагонали параллелепипеда. Тогда, по теореме Виета,

$$\begin{aligned} a + b + c &= 35 \\ ab + ac + bc &= 68 \\ abc &= r \end{aligned}$$

Имеем, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 35^2 - 2 \cdot 68 = 1089$.
 $d = \sqrt{1089} = 33$

Пример $a = 17 + \sqrt{255}, b = 17 - \sqrt{255}, c = 1$ (откуда выводим $r = 34$) доказывает, что такие уравнения есть, то есть задача вполне корректна.

Замечания к задаче 103. Ниже приведены возможные варианты (p, q, d) данной задачи для уравнения $x^3 - p \cdot x^2 + q \cdot x = r$, когда d - натуральное, а p и q в пределах сотни:

(p, q, d)

(3, 4, 1),

(4, 6, 2),

(5, 8, 3), (5, 12, 1),

(6, 10, 4), (6, 16, 2),

(7, 12, 5), (7, 20, 3), (7, 24, 1),

(8, 14, 6), (8, 24, 4), (8, 30, 2),

(9, 16, 7), (9, 28, 5), (9, 36, 3), (9, 40, 1),

(10, 18, 8), (10, 32, 6), (10, 42, 4), (10, 48, 2),

(11, 20, 9), (11, 36, 7), (11, 48, 5), (11, 56, 3), (11, 60, 1),

(12, 22, 10), (12, 40, 8), (12, 54, 6), (12, 64, 4), (12, 70, 2),

(13, 24, 11), (13, 44, 9), (13, 60, 7), (13, 72, 5), (13, 80, 3), (13, 84, 1),

(14, 26, 12), (14, 48, 10), (14, 66, 8), (14, 80, 6), (14, 90, 4), (14, 96, 2),

(15, 28, 13), (15, 52, 11), (15, 72, 9), (15, 88, 7), (15, 100, 5),

(16, 30, 14), (16, 56, 12), (16, 78, 10), (16, 96, 8),

(17, 32, 15), (17, 60, 13), (17, 84, 11),

(18, 34, 16), (18, 64, 14), (18, 90, 12),

(19, 36, 17), (19, 68, 15), (19, 96, 13),

(20, 38, 18), (20, 72, 16),

(21, 40, 19), (21, 76, 17),

(22, 42, 20), (22, 80, 18),

(23, 44, 21), (23, 84, 19),

(24, 46, 22), (24, 88, 20),

(25, 48, 23), (25, 92, 21),

(26, 50, 24), (26, 96, 22),

(27, 52, 25), (27, 100, 23),

(28, 54, 26),

(29, 56, 27),

(30, 58, 28),

(31, 60, 29),

(32, 62, 30),

(33, 64, 31),

(34, 66, 32),

(35, 68, 33),
 (36, 70, 34),
 (37, 72, 35),
 (38, 74, 36),
 (39, 76, 37),
 (40, 78, 38),
 (41, 80, 39),
 (42, 82, 40),
 (43, 84, 41),
 (44, 86, 42),
 (45, 88, 43),
 (46, 90, 44),
 (47, 92, 45),
 (48, 94, 46),
 (49, 96, 47),
 (50, 98, 48),
 (51, 100, 49)

104. Очевидно, q не может быть равно 2. То есть, $q > 2$ - нечетное простое. Пусть $p = 2n + 1, q = 2m + 1$. Тогда $\frac{p+q}{2} = n + m + 1, \frac{p-q}{2} = n - m$. Если n и m одинаковой четности, то $n - m$ делится на 2, а если разной, то $n + m + 1$ делится на 2.

Единственный возможный случай, когда $n - m = 2$ - простое, дает решение: $n = m + 2, p = 2m + 5, q = 2m + 1, \frac{p+q}{2} = 2m + 3$. Одно из трех последовательных нечетных чисел $(2m + 1, 2m + 3, 2m + 5)$ обязано делиться на 3, поэтому $q = 2m + 1 = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow (p, q) = (7, 3)$ - единственное решение.

105. Заметим, что $24^2 - 8^3 = (3 \cdot 2^3)^2 - (2 \cdot 2^2)^3 = 9 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2^6 = 2^6$. Применим эту идею для $n = 90$: $2^{90} = 9 \cdot 2^{90} - 8 \cdot 2^{90} = (3 \cdot 2^{45})^2 - (2 \cdot 2^{30})^3$. Таким образом, $a = 3 \cdot 2^{45} = 105553116266496, b = 2^{31} = 2147483648$.

106. Приведу сразу ответ: $71^2 - 17^3 = 2^7$. Это равенство замечательно тем, что 71, 17 и 7 - простые числа. Вопрос существуют ли другие равенства $p^2 - q^3 = 2^n$, где p и q - простые, кроме данного и совсем тривиального $3^2 - 2^3 = 2^0$, остается открытым.

Замечания к задачам 105 и 106. Задачи связаны с нахождением целочисленных решений уравнения Морделла $y^2 - x^3 = n$ и с соответствующей ему эллиптической кривой Морделла [3].

107. По условию, $n = 5 \cdot p \cdot q$, где p и q не равны 3. Сумма всех его делителей $1 + 5 + p + q + 5p + 5q + pq + 5pq = 6p + 6q + 6pq + 6$, по условию, больше $2n$. То есть,

$$6p + 6q + 6pq + 6 > 2 \cdot 5pq = 10pq$$

Без ограничения общности, предположим, что $p < q$. Последнее неравенство перепишем в виде: $3(p + 1) > q(2p - 3)$, откуда

$$q < \frac{3(p + 1)}{2p - 3} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{5}{2p - 3}\right)$$

Пусть $p = 2$, тогда $q < 9$. Поскольку q не может быть равно 3 или 5, то единственная возможность $q = 7$. С ростом p ограничение для q в правой части убывает и стремится к $\frac{3}{2}$. Уже при следующем возможном $p = 7$, мы получаем, $q < \frac{24}{11}$, что невозможно.

Итак, $n = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ - единственное решение.

108. Легко проверить, что $10^6 \equiv 1 \pmod{13}$. Докажем, что если число нулей равно $6k - 2$, где k любое натуральное число, то число $50\dots021$ делится на 13.

Имеем, $50\dots021 = 5 \cdot 10^{6k-2} \cdot 10^2 + 21 = 5 \cdot 10^{6k} + 21 = 5 \cdot (10^6)^k + 21 \equiv 5 + 21 = 26 \equiv 0 \pmod{13}$

Осталось проверить, что число $2025^n + 1$ имеет вид $6k - 2$.

$$2025^n + 1 \equiv 3^n + 1 \pmod{6} = 3^n + 3 - 2 = (3^{n-1} + 1) \cdot 3 - 2.$$

$3^{n-1} + 1$ - очевидно, четное, то есть $3^{n-1} + 1 = 2k$, k - натуральное и $2025^n + 1 \equiv 6k - 2 \pmod{6}$. Что и требовалось доказать.

2. Задачи для решения с компьютером

Задача 201. Доказать, приведя пример, что существует простое число, квадрат которого равен сумме квадратов некоторого количества $n > 1$ подряд идущих чисел из бесконечной последовательности всех простых чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, ...

Задача 202. Множество состоящее из 8 цифр: $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ разбили на 2 группы по 4 в каждой и составили из цифр групп два четырехзначных числа a и b . Затем добавили к ним еще два числа c и d , записав цифры чисел a и b в обратном порядке. Число c получили из числа a , а d из b . При этом, оказалось, что a самое меньшее из четырех чисел и

$$a \cdot b = c \cdot d$$

Найдите числа a и b .

Задача 203. Ученик Вася придумал следующий способ сокращения дробей: если в числителе и знаменателе дроби есть одинаковые цифры, то их можно вычеркнуть и тем самым "сократить" дробь. В качестве доказательства своего метода он привел множество примеров:

$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5}, \quad \frac{124}{217} = \frac{4}{7}, \quad \frac{154}{253} = \frac{14}{23}, \quad \frac{133}{3325} = \frac{1}{25}, \quad \frac{1666}{6664} = \frac{1}{4}, \quad \frac{7293}{9724} = \frac{3}{4}$$

и так далее.

Найдите "сократимую" по Васиному методу правильную дробь, в числителе и знаменателе которой находятся натуральные числа, содержащие по 6 разных цифр и которая после сокращения равна $\frac{7}{9}$.

Попробуйте исследовать эту задачу для случая 10 не повторяющихся цифр в числителе и знаменателе, то есть когда и в числителе и знаменателе содержатся все 10 цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Сможете ли вы найти в этом случае хотя бы одну "сократимую" по Васе дробь, которая приводится к $\frac{p}{q}$, где $p < q < 10$?

Задача 204. Из ряда натуральных чисел случайно выбрали пять разных чисел от 1 до 120. Когда их сложили, то получили простое число, когда вычислили сумму квадратов этих чисел, то получили куб простого числа, а когда вычислили сумму кубов, то получили квадрат простого числа. Какие пять чисел были выбраны?

Задача 205. Некоторые годы нынешнего столетия можно легко представить в виде суммы квадратов простых чисел, не превосходящих 100. Например,

$$2018 = 13^2 + 43^2$$

$$2023 = 2^2 + 7^2 + 11^2 + 43^2$$

$$2024 = 2^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 41^2$$

Однако есть такие, которые так представить не удастся, например, 2015. Выясните какие годы с 2020 по 2050 нельзя представить в виде суммы квадратов простых чисел не превосходящих 100.

Задача 206. Параллелепипедами Эйлера называются прямоугольные параллелепипеды у которых длины всех ребер (a, b, c) и всех диагоналей граней (x, y, z) - натуральные числа [4]. Например,

$$(a, b, c) = (44, 117, 240), (x, y, z) = (125, 267, 244)$$

$$(a, b, c) = (85, 132, 720), (x, y, z) = (157, 732, 725)$$

$$(a, b, c) = (187, 1020, 1584), (x, y, z) = (1037, 1884, 1595)$$

Заметим, что в этих трех примерах суммы $a + b + c$, а именно: 401, 937, 2791 - простые числа. Найдите все простые числа от 45000 до 50000, которые является суммой длин ребер некоторого параллелепипеда Эйлера.

Задача 207. Число 145 обладает замечательным свойством:

$$145 = 1! + 4! + 5!$$

То есть, оно является суммой факториалов всех своих цифр. Докажите, что количество чисел обладающих таким свойством конечно и найдите все такие числа. По определению,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

для любого натурального n , при этом в целях удобства предполагается, что $0! = 1$.

Задача 208. Рассмотрим множество A всех натуральных чисел, в десятичной записи которых могут присутствовать любые цифры кроме нуля без повторений:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, \dots\}.$$

Для любых натуральных чисел n определим функцию: $f(n)$ = сумме кубов цифр числа n . Например, $f(1) = 1$, $f(3) = 27$, $f(13) = 1^3 + 3^3 = 28$.

1. Кроме тривиального случая $n = 1$, существуют еще два числа множества A , для которых $f(n) = n$. Найдите их.

2. Для каждого числа n из множества A будем строить последовательность: $a_0 = n$, $a_1 = f(a_0)$, $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$ и так далее до первого повторения, после которого последовательность заиклится. Например, возьмем $n = 13$:

$$13, 28, 520, \mathbf{133}, 55, 250, \mathbf{133}, \dots$$

Эта последовательность содержит 6 неповторяющихся элементов, то есть имеет длину 6. Найдите последовательность с наибольшей длиной.

Задача 209. Число 1729 замечательно тем, что это первое число, которое можно представить в виде суммы двух кубов двумя способами:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

Найдите первое (наименьшее) число, которое можно представить в виде суммы двух кубов тремя способами.

Попробуйте также найти первое (наименьшее) число, которое можно представить в виде суммы двух кубов четырьмя способами. Любопытно, что это число делится на 1729 без остатка.

Задача 210. Среднее арифметическое пары простых чисел 3, 7 (число 5), очевидно, является простым. Тройка простых чисел 3, 7, 19 обладает таким свойством, что все три ее средние арифметические

$$\frac{3+7}{2} = 5, \frac{3+19}{2} = 11, \frac{7+19}{2} = 13$$

- простые числа.

Легко проверить, что четверка 3, 11, 23, 71 и пятерка 5, 29, 53, 89, 113 простых имеют точно такие же свойства, а именно: среднее арифметическое любых пар каждой из них является простым числом.

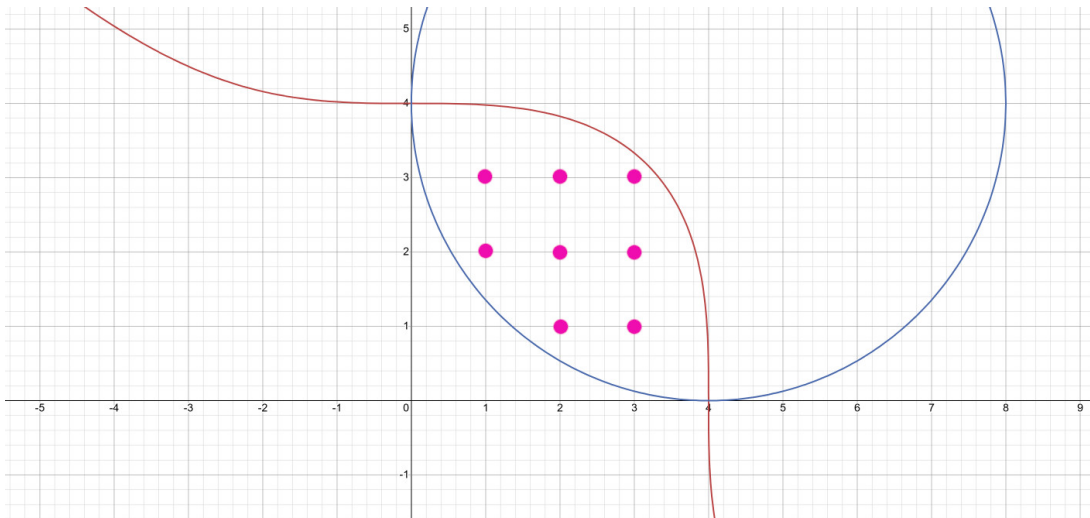
Какова будет максимальная длина последовательности простых чисел обладающей таким свойством, если она может содержать только нечетные простые числа меньше 1000? Найдите эту последовательность.

Задача 211. Некоторые три простых числа a, b, c , не превосходящие 10000, обладают интересными свойствами: $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$, причем d - простое, $a + b + c$ - простое и $a^5 + b^5 + c^5$ - тоже простое. Найдите эти числа.

Задача 212. Обозначим через $f(a)$ функцию, возвращающую по заданному натуральному числу a число точек с натуральными координатами внутри области:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 < a^3 \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 < a^2 \end{cases}$$

На следующем рисунке изображена эта область, а также точки внутри нее, при $a = 4$. Таким образом, $f(4) = 8$.



Найдите такое число a , при котором $f(a)$ является произведением восьми разных простых чисел меньших 65.

Задача 213. Разложение числа 2025 на простые множители имеет вид:

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2$$

Если для порождения натуральных чисел использовать только простые 3 и 5, то получим числа вида $\{3^r \cdot 5^s, r \geq 0, s \geq 0\}$, где r и s пробегает

все целые числа большие или равные нулю. Выпишем начальные члены этого множества, расположенные по возрастанию:

1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 125, 135, 225, 243, 375, 405, 625, 675, 729, 1125, 1215, 1875, 2025, ...

Число 2025 находится в этой возрастающей последовательности на 23-м месте, то есть $a_{23} = 2025$. Найдите число $a_{2025} = 3^m \cdot 5^n$, которое находится на 2025-м месте в этой последовательности. Найдите также m и n для a_{2024} , a_{2025} и a_{2026} .

Задача 214. Функция $f(n) = n^2 - 13n + 59$ дает n -й член последовательности простых чисел

$$\{a_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$$

в **четырёх** случаях, а именно, при $n = 7, 8, 9, 10$. Действительно,

$$f(7) = 17 = a_7$$

$$f(8) = 19 = a_8$$

$$f(9) = 23 = a_9$$

$$f(10) = 29 = a_{10}$$

Найдите такие целые числа b и c чтобы функция $f(n) = n^2 + bn + c$ при некоторых n в **шести** случаях давала бы n -й член последовательности простых чисел $\{a_n\}$. В ответе укажите решение с наименьшим c .

Задача 215. Число

$$\sqrt{7 + \sqrt{6 + \sqrt{5}}} = 3.1416\dots$$

даёт неплохое приближения для числа $\pi = 3.14159265358979323844\dots$. Найдите натуральные числа a, b, c , при которых выражение

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}}$$

даёт наилучшее приближение из всех возможных для числа π . Решите эту задачу также и для более общего выражения с натуральными a, b, c, d :

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d}}}}$$

Задача 216. Рассмотрим последовательности, связанные с так называемой гипотезой Коллаца [5].

Начинаем последовательность с некоторого натурального a_1 . Каждый следующий a_{n+1} член последовательности получаем из предыдущего a_n таким образом:

1. Если число a_n нечетное, то делаем его четным: $a_n = 3a_n + 1$, а если оно уже четное, то пункт 1 пропускаем и переходим к пункту 2.
2. С результатом пункта 1 повторяем операцию деления на 2 до тех пор, пока число не станет нечетным. Это и будет a_{n+1} .

Например, для $a_1 = 7$, получаем

$$7, 11, 17, 13, 5, 1, 1, \dots$$

Гипотеза Коллаца заключается в предположении, что для любого натурального a_1 последовательность завершится единицами.

Заметим, что в приведенном примере последовательности для простого числа $a_1 = 7$ все ее 5 членов, кроме единиц оказались простыми.

Найдите такое наименьшее простое число p , чтобы все 15 членов (кроме единиц) последовательности, начинающейся числом p были простыми.

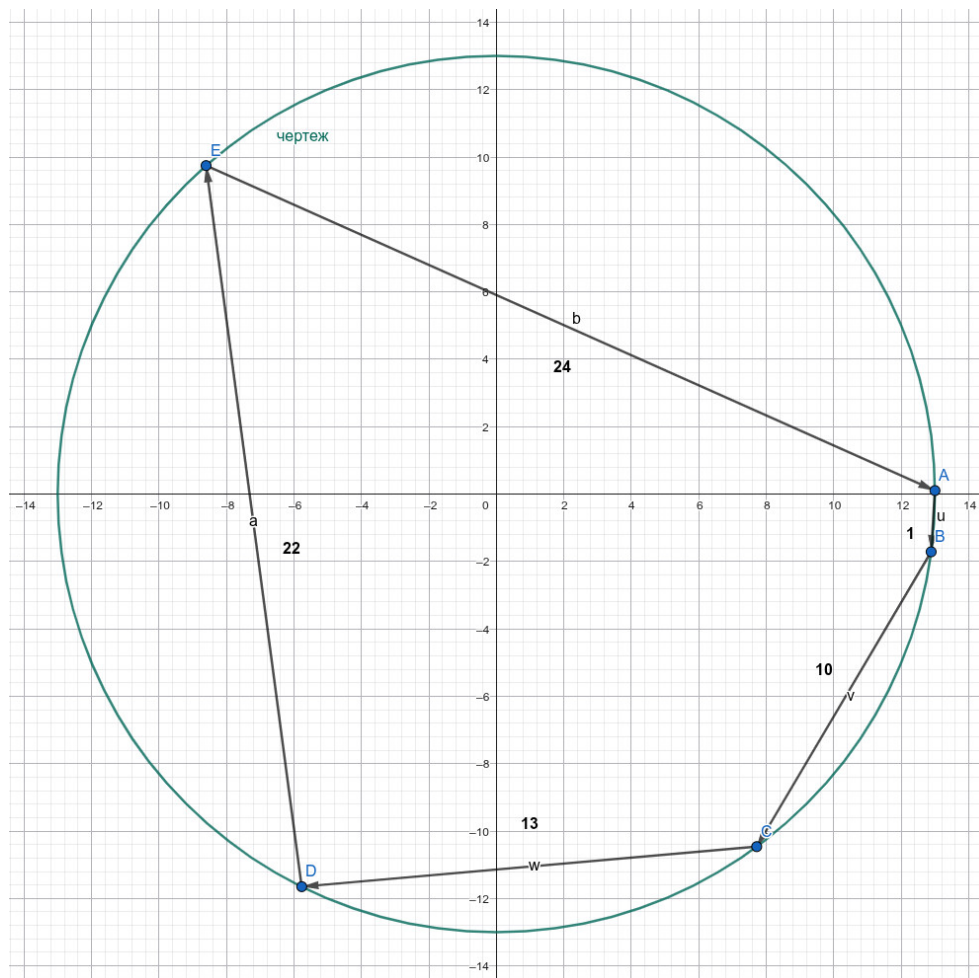
Задача 217. Проверьте следующие представления единицы в виде суммы дробей:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$
$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}$$
$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20}$$

Найдите подобное представление, содержащее 18 разных слагаемых, первое из которых $\frac{1}{9}$, а знаменатели всех дробей в нем больше 8-ми, но меньше 50-ти.

Попробуйте также найти представление единицы в виде суммы разных дробей, в знаменателе которых натуральные числа от 10 до 52.

Задача 218. Около некоторых многоугольников с разными натуральными сторонами можно описать окружность, радиус которой также будет выражаться натуральным числом. Например, все вершины выпуклого пятиугольника сторонами $\{1, 10, 13, 22, 24\}$ лежат на окружности с радиусом 13.



Попробуйте это доказать. Найдите выпуклый восьмиугольник с разными натуральными длинами сторон, все вершины которого лежали бы на окружности радиуса r (r - натуральное число). В ответе укажите решение с наименьшим r .

Задача 219. Натуральные числа n равные сумме всех своих собственных (меньших n) делителей называются совершенными. Например, число 6 имеет собственные делители: $\{1, 2, 3\}$ и $6 = 1 + 2 + 3$.

Если же сумма собственных делителей числа n оказалась больше самого числа n , то такие числа называются избыточными. Таким является, например, любое простое число p . Оно имеет делители $\{1, p\}$ и $p < 1 + p$.

Ну и, наконец, если сумма собственных делителей числа n оказалась меньше самого числа n , то такие числа называются недостаточными. Например, произведение любых двух простых чисел p и q (за исключением случая $p = 2, q = 3$) всегда недостаточное, так как $p \cdot q > 1 + p + q$.

Рассмотрим последовательность всех нечетных простых чисел

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \dots$$

Если брать произведения k ($k = 2, 3, \dots$) подряд идущих чисел в этой последовательности, начиная с некоторого p , то сначала это произведение будет недостаточным, но начиная с некоторого k оно уже становится избыточным.

Проверьте, что $3 \cdot 5, 3 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11, 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ - недостаточные числа и что $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ - избыточное.

То есть, если начать с числа 3, то для того чтобы получить первое избыточное произведение потребовалось взять шесть подряд идущих простых чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17.

Если же начать с числа 5, для того чтобы получить избыточное произведение потребуется уже десять подряд идущих простых чисел

$$5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$$

Произведение из скольких простых чисел идущих подряд нужно будет составить для получения первого избыточного числа, если начать с простого $p = 29$?

Задача 220. Число 855 можно представить в виде суммы двух и более кубов натуральных чисел двумя способами:

$$\begin{cases} 855 = 7^3 + 8^3 \\ 855 = 1^3 + 5^3 + 9^3 \end{cases}$$

Можно сказать, что 855 имеет разложения в сумму от 2 до 3 кубов. Найдите наименьшее натуральное число, которое имело бы все разложения в сумму от 2 до 15 кубов (не обязательно единственным способом).

Задача 221. Последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, определяется следующим образом:

a_0 - наибольшее число, которое невозможно представить в виде суммы кубов различных натуральных чисел,

a_1 - наибольшее число, которое можно представить в виде суммы кубов различных натуральных чисел единственным способом,

a_2 - наибольшее число, которое можно представить в виде суммы кубов различных натуральных чисел двумя способами,

и так далее. Найдите первые 10 членов этой последовательности.

Задача 222. Найти все равенства вида

$$a^2 + b^2 + c^2 + \dots = d^2$$

в которых в десятичной записи чисел a, b, c, \dots, d используются все 10 цифр по одному разу. Сумма квадратов в левой части может содержать любое количество слагаемых большее или равное двум.

Задача 223. Рассмотрим множество дробей с числителем 1. Дробь $1/3$ можно представить в виде суммы трех различных дробей этого множества так:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

При этом, наибольший общий делитель знаменателей (6, 10, 15) равен единице. Найдите подобное представление для дроби $\frac{1}{2025}$. То есть, найти натуральные числа a, b, c ($a < b < c$), такие, что $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ и

$$\frac{1}{2025} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

В ответе указать (a, b, c) с наименьшей суммой $a + b + c$.

Задача 224. Тройка натуральных чисел (x, y, z) называется пифагоровой тройкой, если $x^2 + y^2 = z^2$. Пифагорова тройка (x, y, z) называется примитивной, если $\text{НОД}(x, y, z) = 1$, то есть, если ее числа взаимно простые.

Найдите такую примитивную пифагорову тройку (x, y, z) и натуральное число k , чтобы каждое число пифагоровой тройки $(k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z)$ в своей десятичной записи содержало девять цифр от 1 до 9 по одному разу.

Задача 225. Пусть n - натуральное число, обозначим через $p(n)$ количество простых чисел-подстрок в его десятичной записи. Например, $p(321) = 2$, а $p(231) = 4$.

Действительно, из шести чисел-подстрок числа 321 : 3, 32, 321, 2, 21, 1 только 3 и 2 являются простыми, а для числа 231 простых чисел-подстрок уже четыре: 2, 23, 3, 31.

Найдите 10-значное нечетное число, содержащее в своей десятичной записи все цифры от 0 до 9 и имеющее максимальное число простых чисел-подстрок.

Задача 226. Рассмотрим простое число 31. Если разбить его десятичную запись на две части $a = 3$ и $c = 1$ и между ними постоянно вставлять цифру $b = 3$, то получим подряд 7 простых чисел:

31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331. Следующее 333333331 = 17 · 19607843 - уже составное.

Если же взять простое число 6073, разбить его на $a = 6$, $c = 073$ и вставлять постоянно между ними цифру $b = 9$, то, до первого появления составного, получим уже 9 простых чисел:

6073, 69073, 699073, 6999073, 69999073, 699999073, 6999999073, 69999999073, 699999999073. Заметим, что 6999999999073 = 31 · 107 · 28411 · 74279.

Найти наименьшее простое число и цифру, дающие 11 простых чисел (до первого составного) при постоянном добавлении цифры в десятичную запись числа в выбранной позиции.

Задача 227. Десятизначное натуральное число n в его десятичной записи разбили слева направо на 4 натуральных числа: $[a, b, c, d]$, a - однозначное, b - двузначное, c - трехзначное и d - четырехзначное. Например, для $n = 2176501238$ будет $a = 2$, $b = 17$, $c = 650$, $d = 1238$. Заметим, что в этом примере: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 2172043193 < n$. Найдите такое n , чтобы выполнялось равенство $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = n$.

Задача 228. Обозначим через $d(n)$ - операцию по удалению четности из натурального числа n , то есть если n - нечетное ничего не делаем, а если четное, то делим его на 2 до тех пор пока оно не станет нечетным.

Например, $d(10) = 5, d(12) = 3, d(16) = 1, d(21) = 21$. Пусть b - некоторое нечетное натуральное число. Рассмотрим функцию

$$f_b(n) = d(3 \cdot n + b), n \in \mathbb{N}$$

Если выбрать, например, $b = 5$, то можно построить при помощи функции $f_5(n) = d(3 \cdot n + 5)$ две последовательности, содержащие по 3 бесконечно повторяющихся числа:

$$19, 31, 49, 19.31, 49, \dots$$

$$23, 37, 29, 23.37, 29, \dots$$

Действительно, легко проверить, например, что $f_5(19) = 31, f_5(31) = 49, f_5(49) = 19$ и так далее. Если для той же функции $f_5(n)$ выбрать в качестве начального элемента последовательности 187 или 347, то получим последовательности, содержащие уже по 17 членов до первого повторения.

Найдите наименьшее натуральное число b в функции $f_b(n)$, такое, что найдется последовательность, содержащая 1000 членов до первого повторения. Найдите эту последовательность и вычислите сумму s всех ее 1000 элементов.

Задача 229. Из трех простых чисел p, q, r составили число a , записывая подряд их цифры друг за другом, и оказалось, что оно равно квадрату среднего из них: $a = q^2$. Найдите такие числа.

Задача 230. Пятизначное число $a = 46416$ содержится в начале его четвертой степени: $a^4 = 4641633499322843136$. Найти два тридцатизначных числа, кроме тривиального 10^{29} , обладающих таким же свойством.

3. Ответы

201. $355363^2 + \dots + 355951^2 = 2489647^2$. Сумма квадратов 49 последовательных простых чисел равна квадрату простого числа 2489647.

202. $(a, b) = (1572, 8694)$

203. $\frac{328174}{421938} = \frac{7}{9}$. Для 10 цифр нет "сократимой" до $\frac{p}{q}, p < 10, q < 10$.

- 204.** $19 + 38 + 47 + 111 + 116 = 331$
 $19^2 + 38^2 + 47^2 + 111^2 + 116^2 = 29791 = 31^3$
 $19^3 + 38^3 + 47^3 + 111^3 + 116^3 = 3094081 = 1759^2$
- 205.** 5 лет с 2037 по 2041.
- 206.** 45817, 46727, 47599, 48817, 49801
- 207.** 1, 2, 145, 40585
- 208.** 1. 153, 371.
 2. 12558, 771, 687, 1071, 345, 216, 225, 141, 66, 432, 99, 1458, 702, 351, 153
- 209.** $87539319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$
 $6963472309248 = 2421^3 + 19083^3 = 5436^3 + 18948^3 = 10200^3 + 18072^3 = 13322^3 + 16630^3$
- 210.** 5, 17, 41, 101, 257, 521, 761, 881
- 211.** $839^3 + 3691^3 + 5167^3 = 5737^3$
- 212.** $f(24667) = 406887690 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 61$
- 213.** $a_{2024} = 3^4 \cdot 5^{49}$, $a_{2025} = 3^{67} \cdot 5^6$, $a_{2026} = 3^{26} \cdot 5^{34}$
- 214.** $f(x) = x^2 - 835 \cdot x + 177203$
- 215.** $\sqrt{1 + \sqrt{44 + \sqrt{1202}}}$, $\sqrt{3 + \sqrt{7 + \sqrt{1552 + \sqrt{3888}}}}$
- 216.** 1042776437
- 217.** $1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{24} + \frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{40} + \frac{1}{48}$
 $1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{36} + \frac{1}{39} + \frac{1}{40} + \frac{1}{48} + \frac{1}{52}$
- 218.** $r = 91$, восьмиугольник со сторонами $\{7, 26, 42, 61, 74, 78, 107, 142\}$.
- 219.** 159
- 220.** $23085 = 3^5 \cdot 5 \cdot 19 = 3^3 \cdot 855$
- 221.** 12758, 15278, 15845, 16061, 16034, 17483, 20759, 17258, 19310, 21038, ...

222. $9^2 + 306^2 + 482^2 = 571^2$

$12^2 + 84^2 + 597^2 = 603^2$

$3^2 + 54^2 + 60^2 + 98^2 = 127^2$

$6^2 + 28^2 + 37^2 + 94^2 = 105^2$

$38^2 + 42^2 + 51^2 + 60^2 = 97^2$

$5^2 + 9^2 + 20^2 + 43^2 + 71^2 = 86^2$

223. 5775, 6083, 6399

224. (204, 253, 325), $k = 2099979$

225. 6829547103

226. 239179933, цифра 6, позиция 5 (2391, 79933)

227. 1365991048

228. $b = 3299$, $s = 261882522$

229. $p = 2$, $q = 146509717$, $r = 5420089$

230. 215443469003188372175929356652, 464158883361277889241007635092

4. Ссылки

[1] <https://oeis.org/search?q=1%2C6%2C25%2C96%2C361%2C1350&go=Search>

[2] <https://oeis.org/search?q=1%2C14%2C195%2C2716&go=Search>

[3] <https://personal.math.ubc.ca/~bennett/BeGh-LMSJCM-2015.pdf>

[4] https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BA%D1%83%D0%B1%D0%BE%D0%B8%D0%B4

[5] https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%B7%D0%B0_%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BB%D0%B0%D1%82%D1%86%D0%B0